2. La cicloide. (Fig. 1).

Se llama **"cicloide normal"** la curva que describe un punto P de una circunferencia ruleta que rueda sin resbalar sobre una recta base.

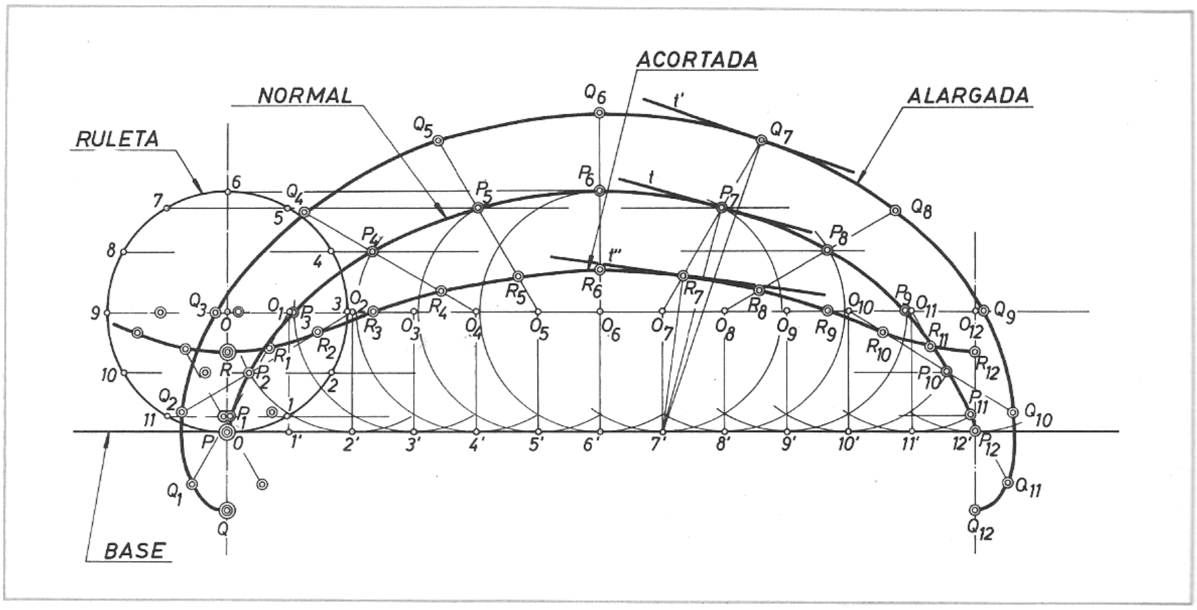

Fig. 1

Para su trazado, se rectifica la ruleta de centro O y radio $\overline{O\text{-}P}$ sobre la base; se tiene así el segmento $\overline{P\text{-}P_{12}}$; este segmento y la ruleta se dividen en un número igual de partes iguales, doce en la figura; por los puntos *1', 2', 3'*... de la base (que son puntos de tangencia instantáneos llamados centros instantáneos de rotación), se trazan perpendiculares a ella, obteniendo O_1, O_2, O_3... en la recta de centros, que es la paralela por O a la base.

Para obtener puntos se opera así: La circunferencia de centro O_1 y radio $\overline{O_1\text{-}1'}$ y la paralela por *1* a la base se cortan en el punto P_1 de la cicloide normal. De la misma forma, la circunferencia de centro en O_2 y la paralela por *2* se cortan en P_2 ; así se obtienen P_3 , P_4 , P_5 ...P_{12} y al unirles se obtiene una arcada de la **cicloide normal.**

–Cicloide acortada. A partir de la cicloide normal se obtiene la cicloide acortada, cuyo punto generador es R, interior a la ruleta y solidariamente unido a ella. En todas las posiciones se conserva constante la distancia $\overline{O\text{-}R}$.

Se lleva el segmento $\overline{O\text{-}R}$ sobre el radio $\overline{O_1\text{-}P_1}$ a partir de O_1 y se tiene R_1 ; llevando $\overline{O\text{-}R}$ sobre $\overline{O_2\text{-}P_2}$ se obtiene R_2 y así sucesivamente se obtienen R_3, R_4...R_{12}, puntos de la cicloide acortada.

–Cicloide alargada. A partir de la cicloide normal se obtiene la cicloide alargada, cuyo punto generador es Q, exterior a la ruleta y solidariamente unido a ella. En todas las posiciones se conserva constante la distancia $\overline{O\text{-}Q}$.

Se lleva $\overline{O\text{-}Q}$ sobre los radios $\overline{O_1\text{-}P_1}$, $\overline{O_2\text{-}P_2}$, etc., a partir de los centros O_1,O_2, etc. obteniéndose los puntos Q_1,Q_2,Q_3,... etc. Si la ruleta sigue rodando se forma otra arcada de cicloide alargada y se produce un lazo, cuya mitad está dibujada en la figura.

Las tangentes en puntos cualesquiera R_7, P_7 y Q_7 de las tres curvas, son perpendiculares a las rectas $\overline{R_7\text{-}7'}$, $\overline{P_7\text{-}7'}$ y $\overline{Q_7\text{-}7'}$, que son las respectivas normales en los citados puntos.

3. La epicicloide. (Fig. 2).

Si imaginariamente se dobla la figura 1 de forma que la base se transforme en una circunferencia, se obtendría la *Fig. 2.* Según esto, las construcciones son similares.

La epicicloide es la curva que describe un punto P de una circunferencia ruleta que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia que hace de base y exteriormente a ella.

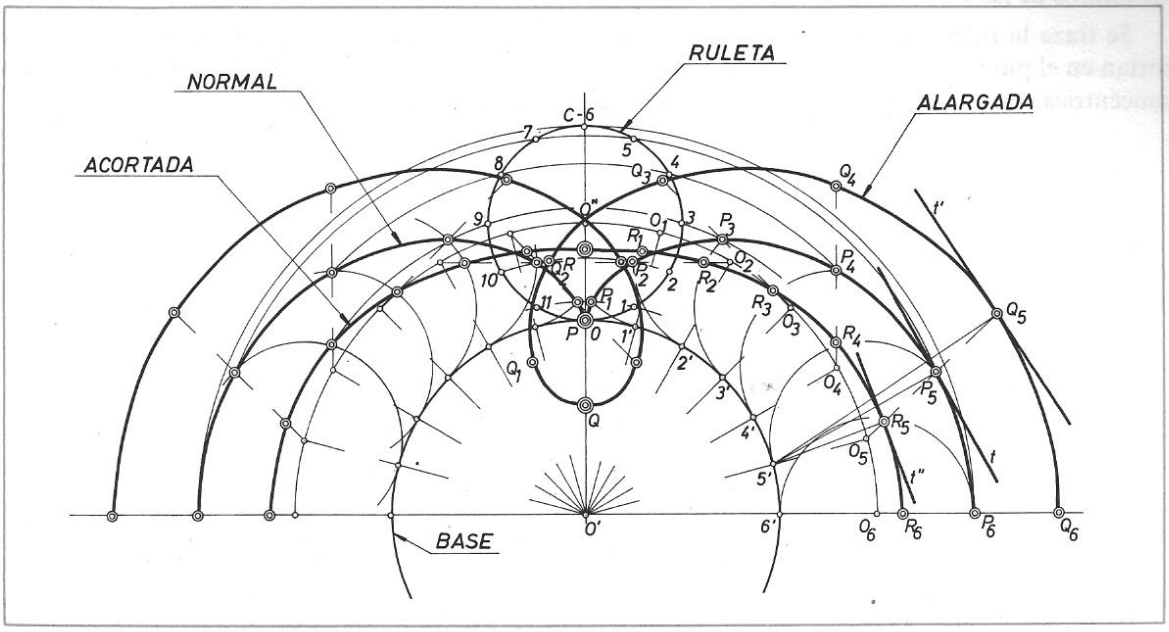

Fig. 2

La base es la circunferencia de centro O' y radio $\overline{O'\text{-}P}$ y la ruleta exterior es otra circunferencia tangente a ella en P, de centro O'' y radio $\overline{O''\text{-}P}$.

Se divide la ruleta en un número de partes iguales, doce en la figura; se llevan estas partes sobre la base, para lo cual, se calcula el ángulo central de n grados que abarca la longitud $2\pi\overline{O\text{-}P}$ de la ruleta, curvificada sobre la base; este ángulo de $n°$ se calcula por medio de una regla de tres:

$$\begin{array}{lcl} 360° & - & 2\pi\overline{O'\text{-}P} \\ n.° & - & 2\pi\overline{O''\text{-}P} \end{array} \quad \therefore \quad n° = 360° \, \frac{\overline{O''\text{-}P}}{\overline{O'\text{-}P}} = 360° \, \frac{r}{R}$$

El ángulo central de $n°$ se divide también en doce partes y se opera luego como en la cicloide. La circunferencia de centro O_1 y radio $\overline{O_1\text{-}1'}$ y la circunferencia concéntrica con la base que pasa por *1*, se cortan en P_1. Así se obtienen $P_2, P_3 ... P_6$. En la figura están dibujadas dos medias arcadas de la curva.

La epicicloide acortada y la epicicloide alargada se engendran por el movimiento de los puntos R y Q, respectivamente, ligados solidariamente a la ruleta. La obtención de los puntos de estas curvas es la misma que para la cicloide.

En la figura se trazan las tangentes t, t' y t'' a las curvas en los puntos P_5, Q_5 y R_5.

4. La hipocicloide. *(Fig. 3).*

Esta curva está engendrada por el punto P de la circunferencia **"ruleta"** de centro O que rueda sin resbalar interiormente sobre la circunferencia **base** de centro O'.

Para la obtención de puntos de esta curva se divide la ruleta en partes iguales, doce en la figura; se obtiene el ángulo $\widehat{P\text{-}O'\text{-}P_{12}}$ de la base, cuyo arco tenga una longitud igual a la longitud de la ruleta; esto se consigue como en la curva anterior: $n° = 360° \dfrac{r}{R}$ siendo r y R los radios de la ruleta y de la base respectivamente.

Se divide el arco $\widehat{P\text{-}P_{12}}$ en doce partes iguales, puntos *1',2',3',* etc. y se unen con *O'*; estos radios cortan en O_1, O_2, O_3, etc., a la circunferencia de centro *O'* y radio $\overline{O'\text{-}O}$; en esta circunferencia están los centros de las sucesivas posiciones de la ruleta.

Se traza la ruleta de posición en O_1 y la circunferencia de centro *O'* y que pase por *1;* ambas se cortan en el punto P_1 de la hipocicloide normal; igualmente, la ruleta de centro O_2 y la circunferencia concéntrica con la base que pase por *2*, se cortan en P_2; así se obtienen los puntos $P_3, P_4, ... P_{12}$.

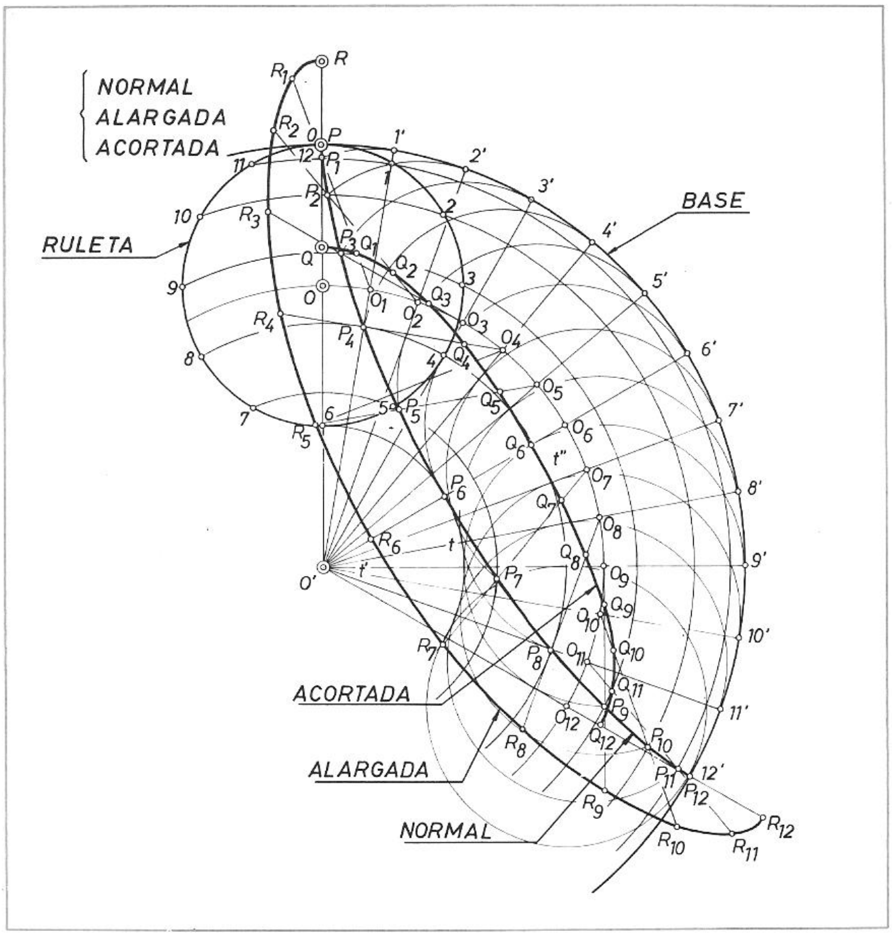

Fig. 3

Para la hipocicloide alargada se elige el punto generador *R*, exterior y solidariamente unido a la ruleta; se une O_1 con P_1 y se lleva a partir de P_1 el segmento $\overline{P\text{-}R}$, obteniendo R_1; igualmente, uniendo O_2 con P_2 y llevando a partir de P_2 el segmento $\overline{P\text{-}R}$, se obtiene R_2; así se obtienen los puntos $R_3, R_4, ... R_{12}$.

Para la hipocicloide acortada se elige el punto generador *Q*, interior y solidariamente unido a la ruleta; en la recta $O_1\text{-}P_1$ se toma $\overline{O_1\text{-}Q_1} = \overline{O\text{-}Q}$ y se obtiene Q_1; en la recta $O_2\text{-}P_2$ se lleva $\overline{O_2\text{-}Q_2} = \overline{O\text{-}Q}$ y se obtiene Q_2; igualmente se obtienen los demás puntos de la curva.

Problema

Averiguar **dónde estará el punto P** de la rueda pequeña al **rodar 6 cm**. sin resbalar sobre el círculo mayor.