CURVAS CONICAS

ESTUDIO GRÁFICO DE LA ELIPSE

3. La elipse: Propiedades más importantes de esta curva. *(Figs. 6 y 7).*

Dado el carácter eminentemente gráfico de este estudio se indican solamente las propiedades más importantes de las cónicas.

La elipse es una curva cerrada y plana, cuyos puntos constituyen un lugar geométrico que tiene la propiedad de que *la suma de distancias* de cada uno de sus puntos a otros dos, fijos, F y F', llamados focos, es constante e igual a $2a$, siendo $2a$ la longitud del eje mayor $\overline{AB}$ de la elipse. *(Fig. 6).*

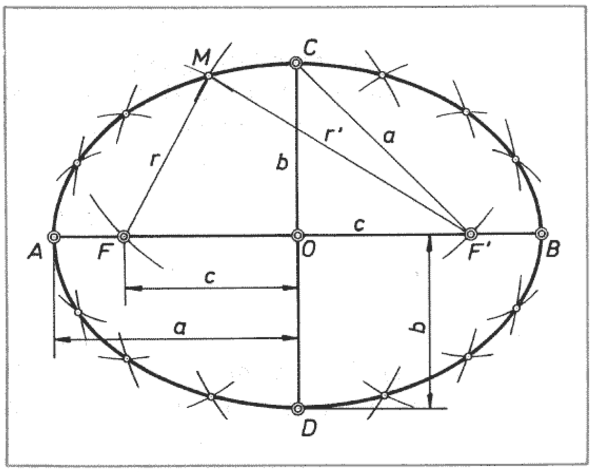


Fig. 6

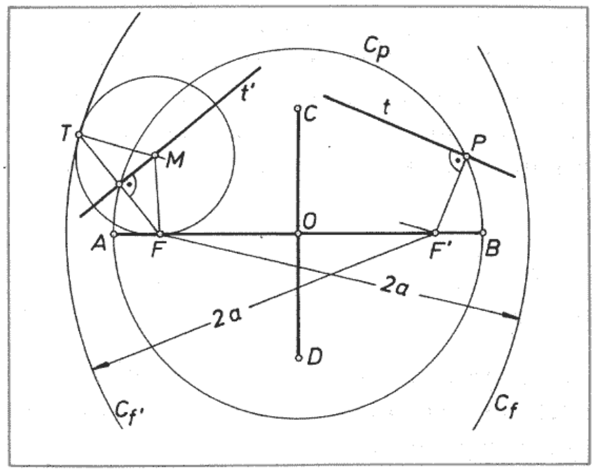


Fig. 7

Tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en el punto medio O, centro de la curva. El eje mayor $\overline{AB}$ se llama eje real y se representa por $2a$. El eje menor $\overline{CD}$ se representa por $2b$. Los focos están en el eje real. La distancia focal F-F' se representa por $2c$.

Entre a, b y c existe la relación: $a^2 = b^2 + c^2$

La elipse es simétrica respecto de los dos ejes y, por tanto, respecto del centro O. Las rectas que unen un punto M de la curva con los focos, se llaman **radios vectores** r y r' y por la definición se verifica: $r + r' = 2a$.

Extraído de *"curso de dibujo geométrico y de croquización"*. F. J. Rodríguez de abajo –V. Álvarez Bengoa

La **circunferencia principal** C_p de la elipse es la que tiene por centro el de la elipse y radio a. Se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a cada una de las tangentes. *(Fig. 7)*. **Las circunferencias focales** C_f y C_f' de la elipse tienen por centro uno de los focos y radio $2a$.

La elipse se puede definir también como el lugar geométrico de los centros de circunferencias que pasan por un foco y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco.

Si tenemos un diámetro de la elipse, el **diámetro conjugado** con él es el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas paralelas al primero. Los ejes son dos diámetros conjugados y los únicos que son perpendiculares. En la circunferencia todas las parejas de diámetros conjugados son perpendiculares.

4. Construcción de la elipse por puntos a partir de los ejes. *(Fig. 8)*.

Se conocen los ejes $\overline{AB} = 2a$ y $\overline{CD} = 2b$. Con centro en C o D y radio a, se corta al eje mayor en F y F', focos de la curva.

Se toma un punto N cualquiera en el eje mayor; con radio $\overline{AN}$ y centro en F se traza el arco *2* y con radio $\overline{NB}$ y centro en F', se traza el arco *1*; estos dos arcos se cortan en el punto M de la elipse. De esta forma, la suma de las distancias de M a F y F' es igual a $\overline{AB} = \overline{AN} + \overline{NB} = 2a$. Repitiendo esta operación y tomando otros puntos en el eje mayor entre F y F' se van determinando puntos de la curva que se unen con plantilla.

5. Trazado de la elipse por haces proyectivos a partir de los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. *(Fig. 9)*.

Se construye el rectángulo $OAEC$ y se dividen los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{AE}$ en el mismo número de partes iguales, cinco en la figura. Los rayos *C1, C2 C3* y *C4* se cortan respectivamente con los rayos *D1, D2, D3* y *D4* en puntos de la elipse.

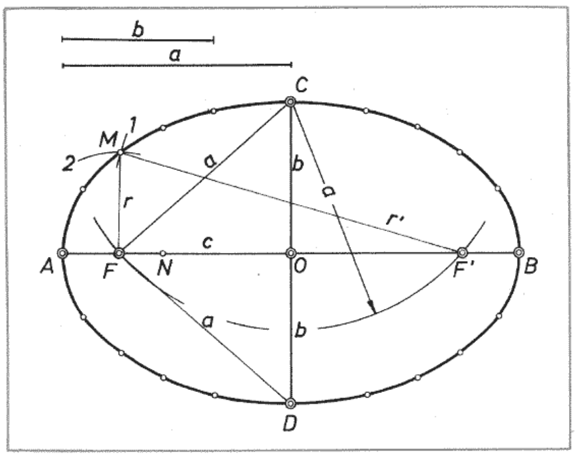


Fig. 8

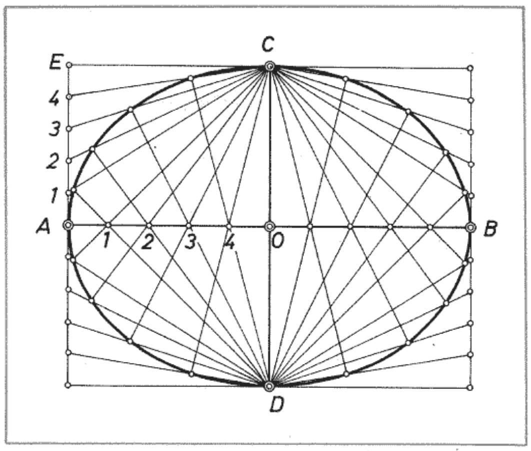


Fig. 9

Extraído de *"curso de dibujo geométrico y de croquización"*. F. J. Rodríguez de abajo –V. Álvarez Bengoa

6. Trazado de la elipse por haces proyectivos a partir de una pareja de diámetros conjugados $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$. *(Fig. 10).*

Se opera como en la *Fig. 9.* En este caso, el rectángulo se transforma en el romboide *O'A'E'C'* formado por las tangentes a la elipse en los extremos de los diámetros conjugados y que son paralelas a ellos.

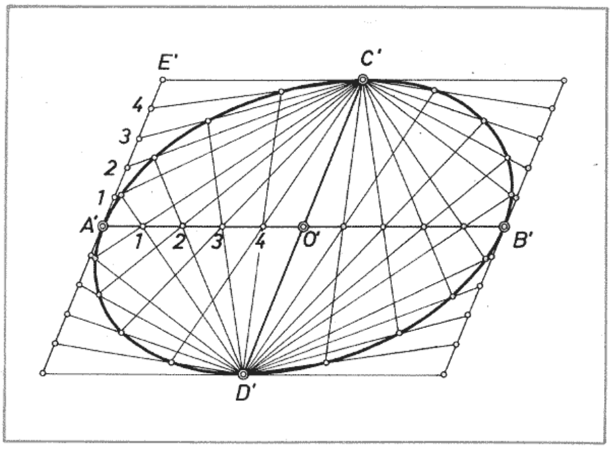


Fig. 10

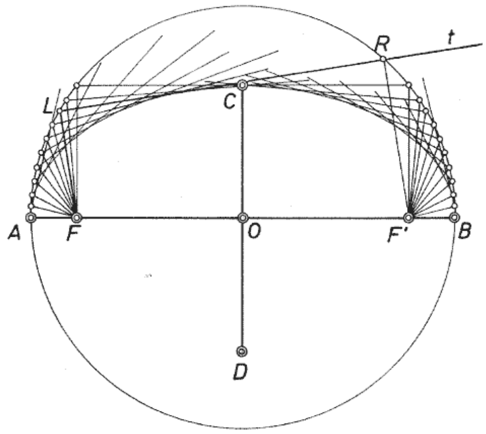
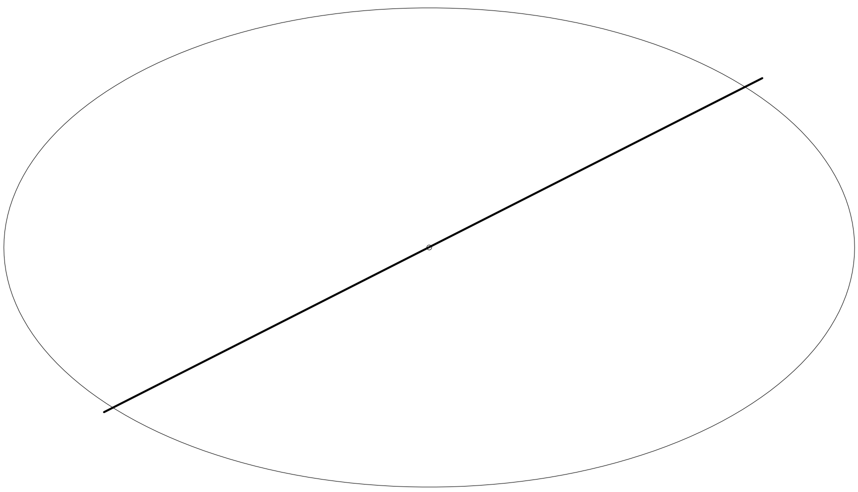


Fig. 11

Problema: Dada la elipse hallar el **diámetro conjugado** del que aparece dibujado:



Extraído de *"curso de dibujo geométrico y de croquización".* F. J. Rodríguez de abajo –V. Álvarez Bengoa

7. Trazado de la elipse por envolventes. *(Fig. 11).*

Esta construcción se funda en que la circunferencia principal de diámetro $2a$ y centro O es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por cada foco a las tangentes. Las envolventes son, pues, las tangentes.

Por ejemplo, se toma un punto cualquiera L de la circunferencia principal, se une con F y se traza la perpendicular t por L a $\overline{FL}$; la recta t es tangente a la elipse; repitiendo esta operación se tienen una serie de tangentes que van envolviendo la curva.

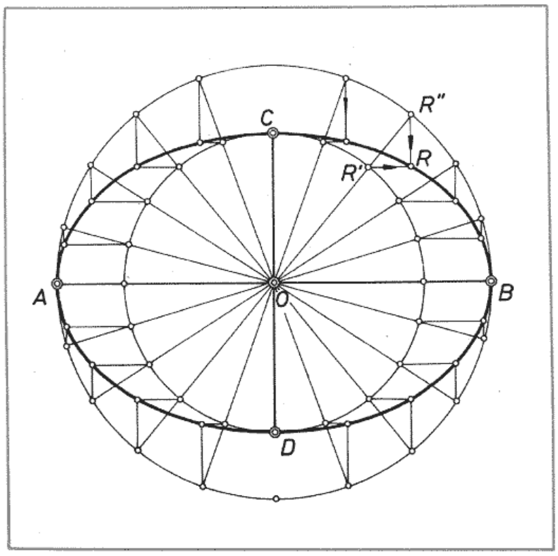


Fig. 12

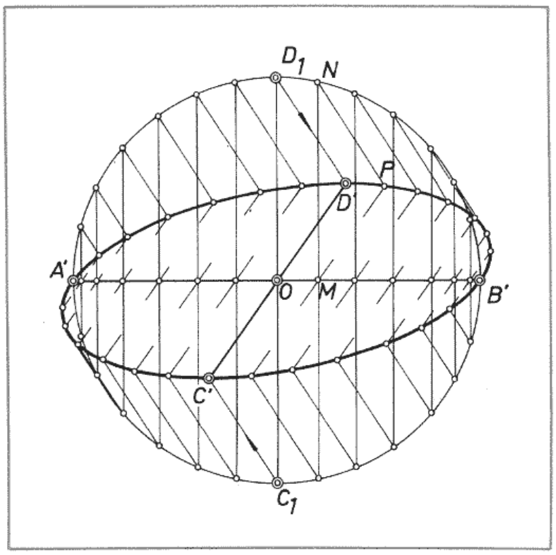


Fig. 13

8. Trazado de la elipse por puntos mediante la circunferencia principal y la de diámetro 2b. *(Fig. 12).*

Se traza un radio cualquiera que corta en R' y R'' a las dos circunferencias; por R' se traza la paralela a $\overline{AB}$ y por R'' la paralela a $\overline{CD}$, que se corta con la anterior en el punto R de la elipse. En la figura se repite esta operación numerosas veces.

9. Otra construcción de la elipse a partir de una pareja de diámetros conjugados. *(Fig. 13).*

Se conocen los diámetros conjugados $A'B'$ y $C'D'$; se traza la circunferencia de diámetro $A'B'$; la perpendicular por O a $A'B'$ corta en D_1 a la circunferencia. Los puntos de la elipse se obtienen construyendo triángulos semejantes al OD_1D', tales como el MNP de lados paralelos a los del triángulo OD_1D'.

10. Trazado de la tangente y normal en un punto de la elipse. *(Fig. 14).*

La tangente a la elipse en un punto M de ella es la recta t, bisectriz exterior del ángulo que forma los radios vectores $\overline{MF}$ y $\overline{MF'}$. La normal a la elipse en M es la perpendicular n a la tangente t. En la figura no se construye la elipse que está definida por los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

11. Tangentes a la elipse desde un punto exterior P. *(Fig. 15).*

Sabiendo que la circunferencia focal es el lugar geométrico de los puntos simétricos del otro foco respecto de las tangentes, tenemos que buscar un punto de ella que, unido con F', resulte ser una cuerda de la circunferencia de centro P y radio $\overline{PF'}$.

Según esto, se trazan la circunferencia focal de centro F y la de centro P y radio hasta el otro foco F', las cuales se cortan en los puntos M y N; se unen estos puntos con F' y se trazan las mediatrices de los segmentos $\overline{F'\text{-}M}$ y $\overline{F'\text{-}N}$, las cuales pasarán por P y serán las tangentes a la elipse. Los puntos de tangencia se obtienen al unir M y N con el foco F que es centro de la focal.

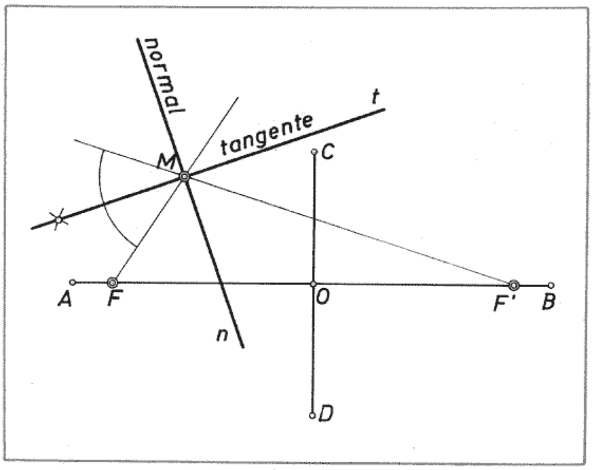


Fig. 14

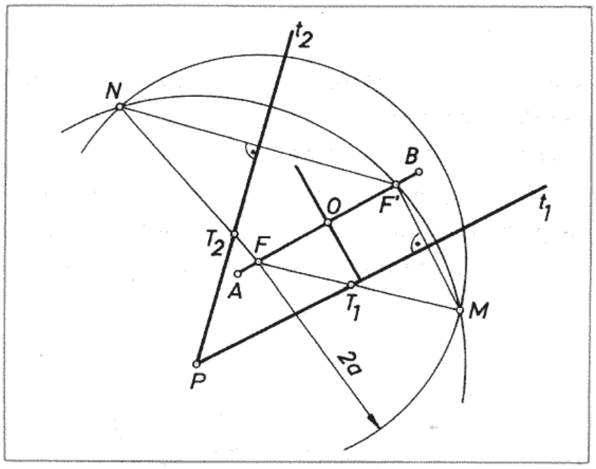


Fig. 15

12. Tangentes a la elipse, paralelas a una dirección dada d. *(Fig. 16).*

Si las tangentes han de ser paralelas a una dirección, el punto P de la figura anterior está en el infinito y la circunferencia de centro P y radio hasta el foco F' (que no es centro de la focal), tiene radio infinito, convirtiéndose en una recta que pasa por F' y es perpendicular a la dirección dada. Las mediatrices de los segmentos $\overline{F'\text{-}F'_1}$ y $\overline{F'\text{-}F'_2}$ son las tangentes y los puntos T_1 y T_2 son los de tangencia.

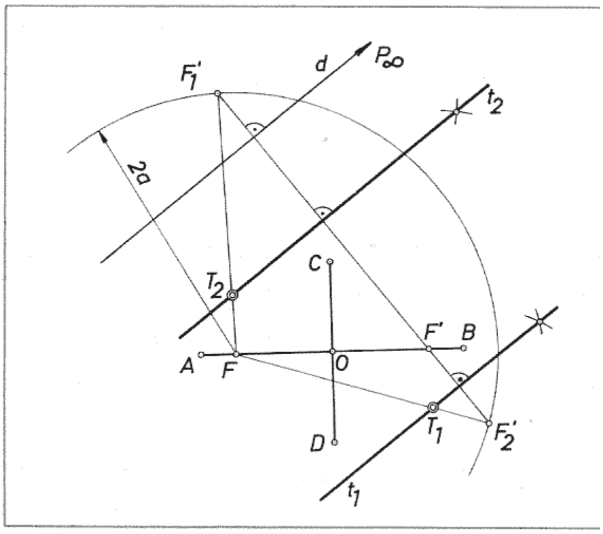


Fig. 16

Extraído de *"curso de dibujo geométrico y de croquización".* F. J. Rodríguez de abajo –V. Álvarez Bengoa

16. Problema: Dada una elipse por una pareja de diámetros conjugados $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$, hallar los ejes.

Primer procedimiento: *(Fig. 20).*

Por el centro O se traza la perpendicular a $A'B'$ y se lleva $\overline{OP} = \overline{OA'}$; se une P con C' y se traza la circunferencia de centro O_1 y diámetro $\overline{PC'}$; con centro en O_1 y radio $\overline{O_1O}$ se traza la semicircunferencia ROS; uniendo O con R y S se obtienen los ejes de la elipse en posición. La magnitud de ellos es: $a = \overline{OI}$ y $b = \overline{OH}$, que se llevan sobre cada uno de ellos respectivamente.

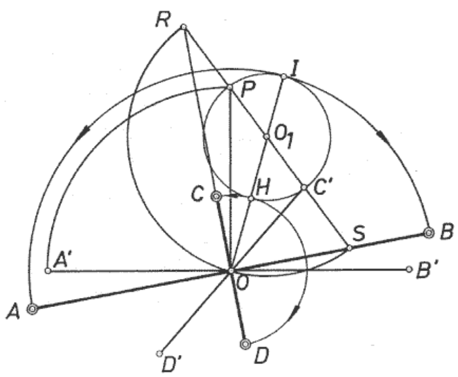


Fig. 20

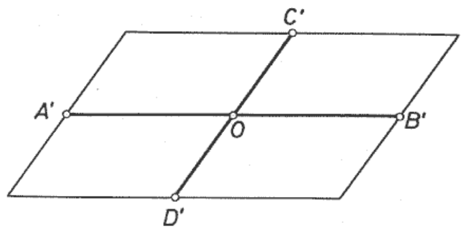


Fig. 21

La *figura 21* indica que las tangentes a una elipse en puntos que son extremos de una pareja de diámetros conjugados, son pralelas a los diámetros conjugados respectivos, formándose un romboide circunscrito a la elipse. Las tangentes en C' y D' son paralelas al diámetro $\overline{A'B'}$ y las tangentes en A' y B' son paralelas al diámetro $\overline{C'D'}$.

17. Puntos de intersección de una recta con una elipse. *(Fig. 24).*

Sea la recta r y la elipse dada por sus elementos, focos y vértices. Sabiendo que la elipse es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes a la focal y pasan por el otro foco, el problema se reduce a hallar los centros de estas circunferencias.

En la figura se traza la focal del foco F, de radio $2a$, y se halla el simétrico F'_1 del foco F' respecto a r; se traza una circunferencia auxiliar cualquiera de centro O en la recta r, la cual corta a la focal en los puntos 1 y 2; la cuerda $\overline{1\text{-}2}$ y la recta $\overline{F'\text{-}F'_1}$ se cortan en el centro radical C_r; desde C_r se trazan las tangentes a la focal y los puntos de tangencia T_1 y T_2 se unen con F, dando los centros I_1 y I_2 en r, que son los puntos donde la recta r corta a la elipse y a la vez centros de circunferencias tangentes a la focal de F y que pasan por el otro foco F'.

18. Determinación de los elementos de una elipse conociendo un foco F, una tangente t con su punto de contacto T y la magnitud 2a. *(Fig. 25).*

Se une el foco F con el punto de tangencia T y se construye el ángulo β igual al ángulo α. Sobre la recta que ha de contener al otro radio vector r' se lleva la diferencia $2a - \overline{FT}$ y tendremos $r' = \overline{TF'}$, con lo que queda determinado el otro foco. Los puntos N y M, pies de las perpendiculares trazadas por los focos a la tangente t, son de la circunferencia principal.

Extraído de *"curso de dibujo geométrico y de croquización"*. F. J. Rodríguez de abajo –V. Álvarez Bengoa

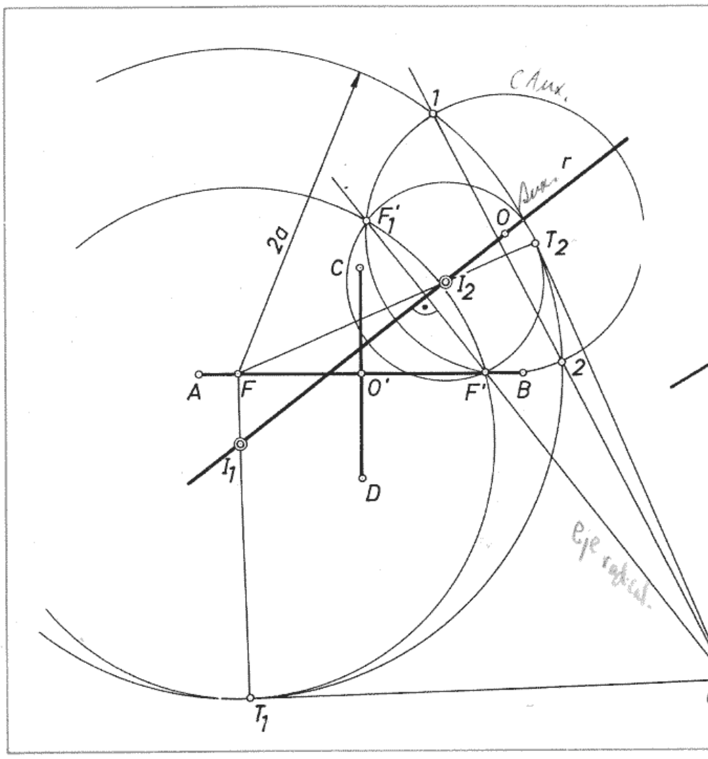


Fig. 24

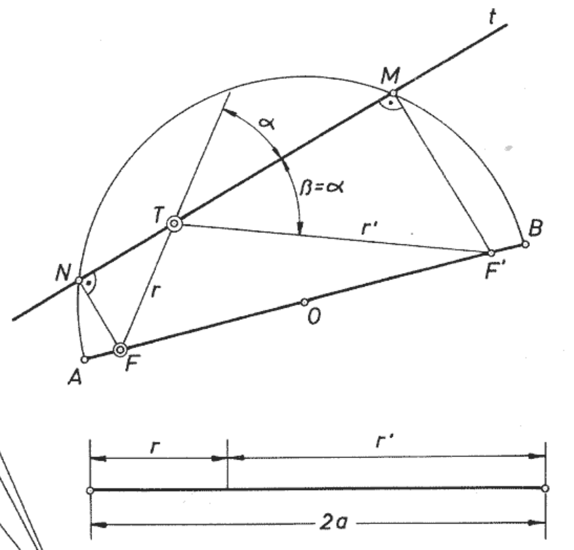


Fig. 25

19. Determinación de los elementos de una elipse conociendo un foco F, una tangente t y otra tangente t_1 con su punto de contacto T_1. *(Fig. 26)*.

Se hallan los puntos *F'* y *F''* simétricos de *F* respecto de las tangentes *t* y t_1; el foco F_1 estará en la mediatriz del segmento $\overline{F'\text{-}F''}$, ya que estos puntos son de la circunferencia focal de centro F_1 y también estará en el otro radio vector r_1 que pasa por T_1; en la figura se ha construido el ángulo β igual al α para tener el radio vector r_1. Los puntos N_1 y N_2 son de la circunferencia principal y el centro estará en la mediatriz de $\overline{N_1\text{-}N_2}$ y que será el punto medio de $\overline{F\text{-}F_1}$. Los vértices *A* y *B* se obtienen sabiendo que la suma de *r* y r_1 es igual a *2a*.

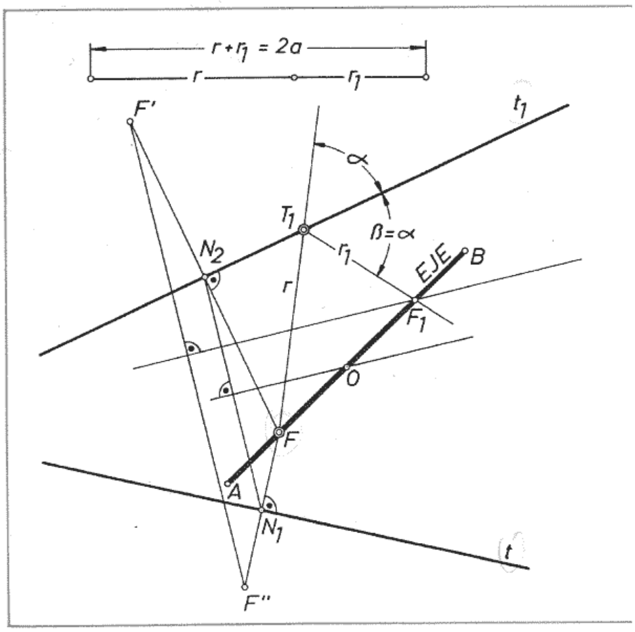


Fig. 26

CURVAS CONICAS
ESTUDIO GRAFICO DE LA HIPERBOLA

1. La hipérbola: Propiedades más importantes de esta curva. *(Fig. 1).*

La hipérbola es una curva plana, abierta, con dos ramas; se define como el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos fijos es constante e igual a $2a$, siendo $2a = \overline{AB}$, la longitud del eje real. Los puntos fijos son los focos F y F'.

Tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en el punto medio O, centro de la curva. El eje mayor $\overline{AB}$ se llama eje real y se representa por $2a$; el eje menor se representa por $2b$ y se llama imaginario porque no tiene puntos comunes con la curva. Los focos están en el eje real. La distancia focal $\overline{F\text{-}F'}$ se representa por $2c$.

Entre a, b y c existe la relación: $c^2 = a^2 + b^2$.

La hipérbola es simétrica respecto de los dos ejes y, por lo tanto, respecto del centro O. Las rectas que unen un punto M de la curva con dos focos, se llaman **radios vectores** r y r' y por la definición se verifica: $r - r' = 2a$.

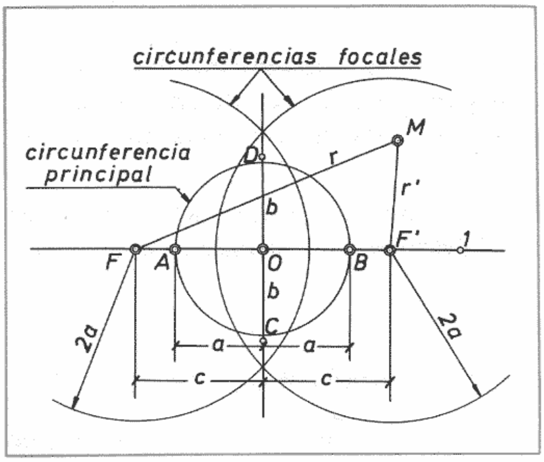


Fig. 1

La circunferencia principal de la hipérbola es la que tiene por centro O y radio $2a$. Se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a cada una de las tangentes. **Las circunferencias focales** tienen por centros los focos y radio $2a$.

La hipérbola, como la elipse, se puede definir como el lugar geométrico de los centros de circunferencias que pasan por un foco y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco.

Extraído de *"curso de dibujo geométrico y de croquización"*. F. J. Rodríguez de abajo –V. Álvarez Bengoa

Las asíntotas de la hipérbola son las tangentes a la curva en los puntos del infinito. Estas asíntotas son simétricas repecto de los ejes y pasan por el centro de la curva.

2. Construcción de la hipérbola por puntos a partir de los ejes. *(Fig. 2).*

Los datos son: $2a = \overline{AB}$ y $2c = \overline{FF'}$. Se toma un punto N en el eje real $\overline{AB}$ y con radios $\overline{AN}$ y $\overline{BN}$ y centros en F y F' se trazan dos arcos que se cortan en M, punto de la hipérbola; de esta forma, $\overline{MF} - \overline{MF'} = 2a = \overline{AB}$. En la figura se obtienen otros puntos de la curva tomando los puntos *1, 2* y *3* del eje real.

3. Construcción de la hipérbola por haces proyectivos. *(Fig. 3).*

Se conocen $2a = \overline{AB}$ y $2c = \overline{FF'}$; se halla un punto cualquiera P de la curva y se construye el rectángulo $AMPN$; se dividen los lados $\overline{MP}$ y $\overline{PN}$ en un número cualquiera de partes iguales que se unen con los puntos A y F', respectivamente. Los puntos de intersección de los rayos homónimos u homólogos de estos dos haces son puntos de la hipérbola. Así, $\overline{F'4}$ y $\overline{A4}$ se cortan en el punto T de la curva; de la misma forma se construye la parte inferior de la curva.

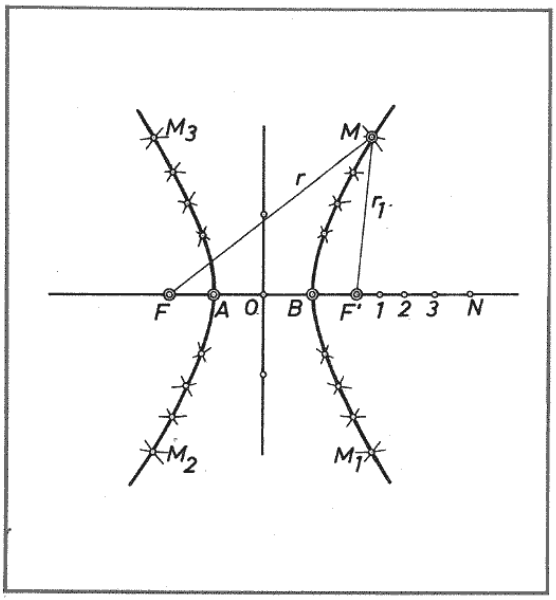


Fig. 2

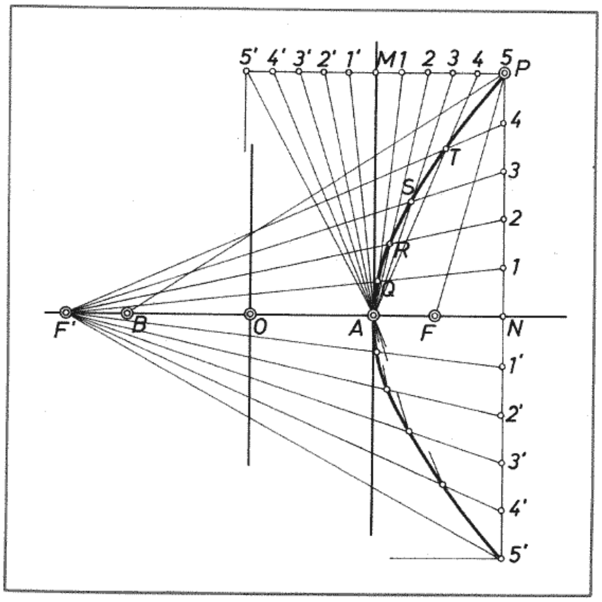


Fig. 3

4. Trazado de la hipérbola por envolventes. *(Fig. 4).*

Se conocen los vértices A y B y los focos F y F'; se construye la circunferencia principal de centro O y radio $a = \overline{OA} = \overline{OB}$. Al igual que en la elipse, basta tomar puntos en la circunferencia principal, unirles con F y trazar las correspondientes perpendiculares, que son tangentes a la curva. En la figura sólo está trazada una rama.

Las asintotas a y a_1 de la hipérbola son tangentes a ella en el infinito. Son simétricas respecto de los ejes, pasan por el centro O y por el vértice R y su simétrico S del triángulo rectángulo cuyos catetos son a y b y la hipotenusa c.

5. Trazado de la tangente y normal a la hipérbola en un punto P de ella. *(Fig. 5).*

La tangente y la normal en un punto P de la hipérbola, al igual que en la elipse, son las bisectrices de los ángulos que forman los radios vectores r y r_1 del punto P.

Extraído de *"curso de dibujo geométrico y de croquización"*. F. J. Rodríguez de abajo –V. Álvarez Bengoa

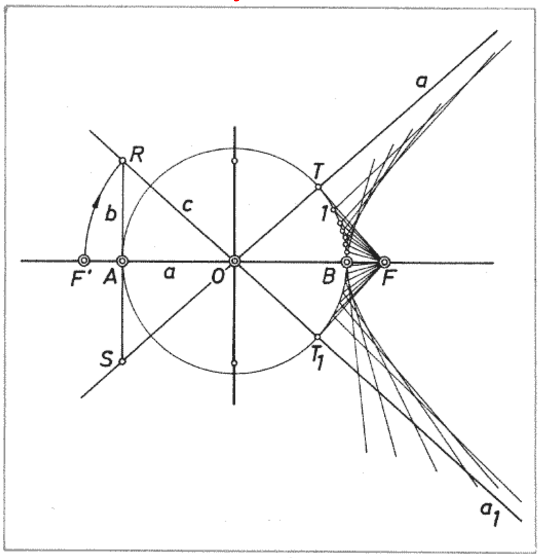


Fig. 4

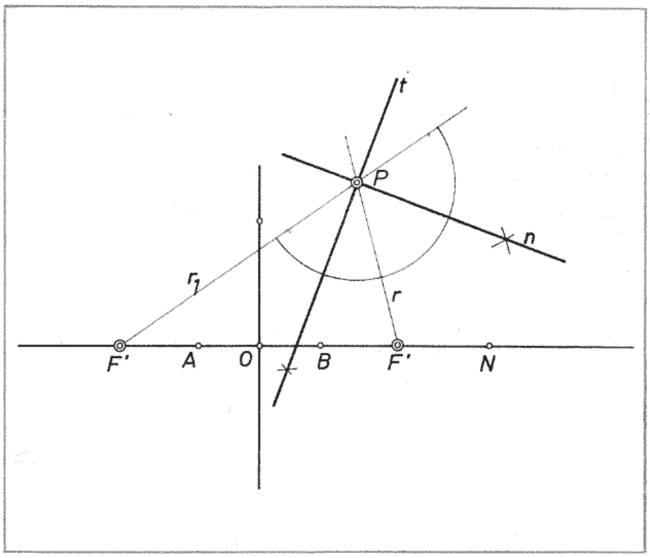


Fig. 5

6. Tangentes a la hipérbola desde un punto exterior. *(Fig. 6).*

Se traza la circunferencia focal de centro *F* y la circunferencia de centro el punto *P*, dado, y que pasa por el otro foco *F'*; estas dos circunferencias se cortan en los puntos *N* y *M* que, unidos con *F'*, nos dan los segmentos $\overline{NF'}$ y $\overline{MF'}$; las mediatrices de estos segmentos pasan por *P* y son las tangentes a la hipérbola. Los puntos de tangencia T_1 y T_2 se obtienen uniendo *F* con *N* y *M* hasta que corten a las tangentes.

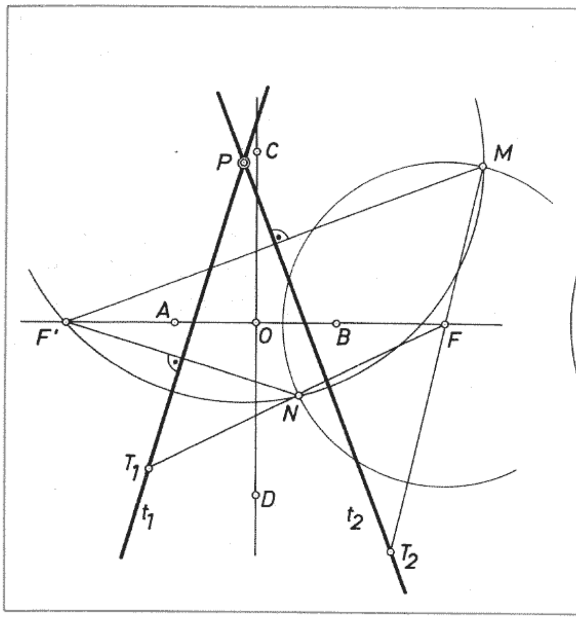


Fig. 6

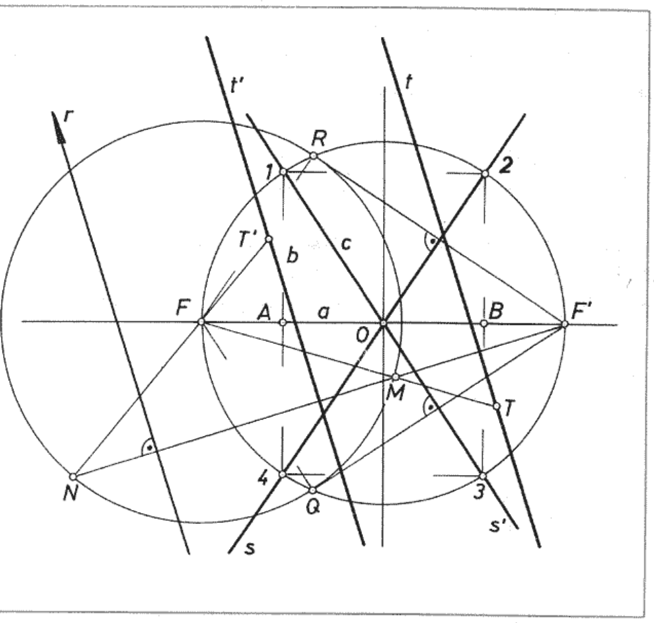


Fig. 7

7. Tangentes a la hipérbola paralelas a una dirección dada r. *(Fig. 7).*

Como en la elipse, se traza por un foco *F'* la perpendicular a la dirección *r*, la cual corta a la circunferencia focal del foco *F* en los puntos *N* y *M*. Las tangentes *t* y *t'* son las mediatrices de los segmentos $\overline{F'N}$ y $\overline{F'M}$. En la figura se trazan también las asíntotas, que son las mediatrices de los segmentos $\overline{F'Q}$ y $\overline{F'R}$.

8. Trazado de las asíntotas de la hipérbola a partir de la circunferencia principal. *(Fig. 8)*.

Las asíntotas pasan por el centro O de la curva, por lo tanto, se trata de trazar las tangentes a la hipérbola desde un punto O. La circunferencia principal, de centro O y radio $a = \overline{OA}$, corta a la de diámetro $\overline{OF'}$ en los puntos N y N_1. Las rectas ON y ON_1 son las asíntotas. También se obtienen uniendo el punto O con los puntos *1* y *2* donde corta a la circunferencia de diámetro $\overline{FF'}$ (radio $= c$) la perpendicular por B al eje real. El triángulo *1-B-O* es rectángulo y sus lados son a, b y c.

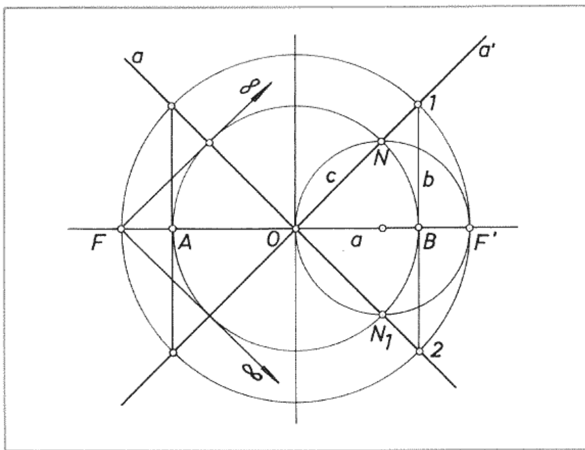


Fig. 8

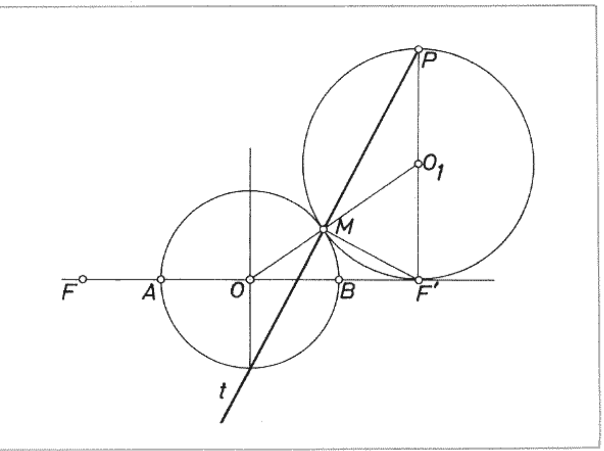


Fig. 9

9. Trazado de la tangente de la hipérbola en el punto P de ella, empleando la circunferencia principal. *(Fig. 9)*.

La circunferencia principal sabemos que es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por el foco a cada una de las tangentes. Según esto, basta unir el punto P de la curva con F' y trazar la circunferencia de diámetro $\overline{PF'}$, la cual será tangente a la circunferencia principal en el punto M. La recta PM es la tangente a la hipérbola en el punto P.

10. Trazado de las tangentes a la hipérbola desde un punto exterior P, empleando la circunferencia principal. *(Fig. 10)*.

Se traza la circunferencia principal y la de diámetro $\overline{PF}$, las cuales se cortan en los puntos N y N_1 que, unidos con P, nos dan las tangentes t y t_1. Para hallar los puntos de tangencia, se une O con N y N_1, y por F' se trazan las paralelas respectivas a ON y ON_1, hasta que corten a las tangentes.

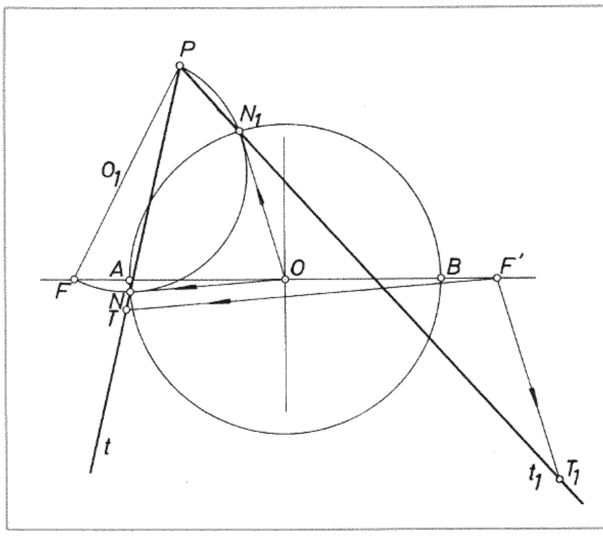


Fig. 10

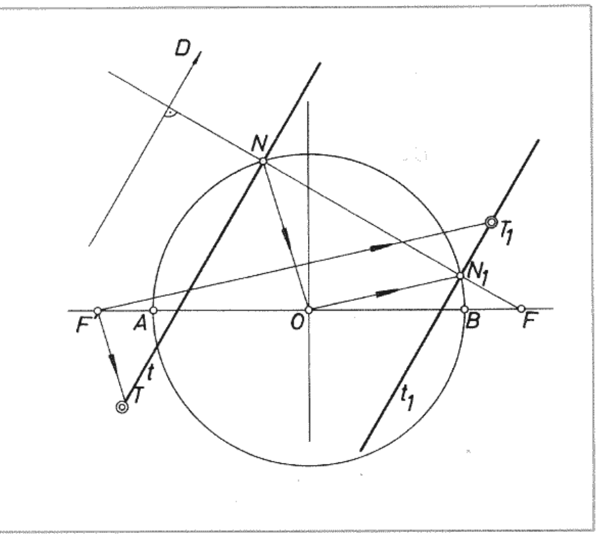


Fig. 11

Extraído de *"curso de dibujo geométrico y de croquización"*. F. J. Rodríguez de abajo –V. Álvarez Bengoa

11. Trazado de las tangentes a la hipérbola paralelas a una dirección dada D, empleando la circunferencia principal. *(Fig. 11).*

Al igual que en los problemas anteriores, la circunferencia de diámetro $\overline{PF}$ es ahora una recta (de diámetro infinito), la cual pasa por F y es perpendicular a la dirección D; esta recta corta a la circunferencia principal en N y N_1 y las tangentes pasan por estos puntos y son paralelas a D. Los puntos de tangencia se obtienen como en la figura anterior.

12. Determinación de los demás elementos de una hipérbola conociendo los focos F y F' y una asíntota s. *(Fig. 12).*

La recta F-F', eje mayor, corta a la asíntota s en el centro O de la curva; con centro en O y radio $\overline{OF} = \overline{OF'}$ se traza la circunferencia que corta en H y H' a la asíntota; las perpendiculares por estos puntos a F-F' dan los vértices A y B de la hipérbola. En la figura, $\overline{OA} = \overline{OB} = a$; $\overline{HB} = b$; $\overline{OH} = \overline{OH'} = c$.

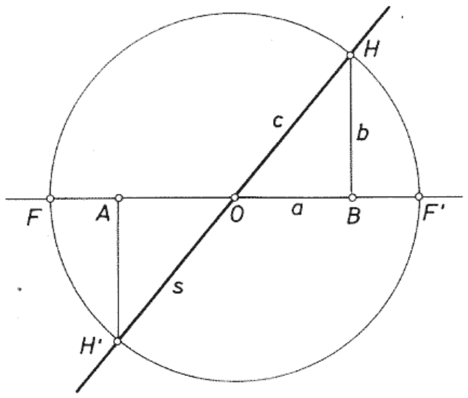


Fig. 12

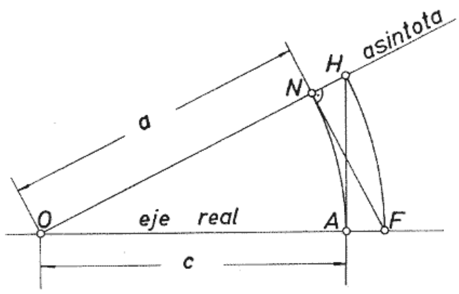


Fig. 13

13. Determinación de los elementos de una hipérbola conociendo un foco F, una asíntota y la magnitud a. *(Fig. 13).*

Por el foco F se traza la perpendicular a la asíntota y a partir de N se lleva la magnitud a, semieje menor, teniendo así el punto O, centro de la curva. La recta OF es el eje real y se lleva $\overline{OF}$ en $\overline{OH}$; desde H se traza la perpendicular al eje y tenemos el vértice A del eje mayor. En la figura no se ha dibujado el simétrico de A respecto de O.

14. Determinación de los elementos de una hipérbola conociendo un foco F, una tangente t con su punto de contacto y la magnitud a. *(Fig. 14).*

Situados los datos, en la figura se puede seguir con gran sencillez la construcción.

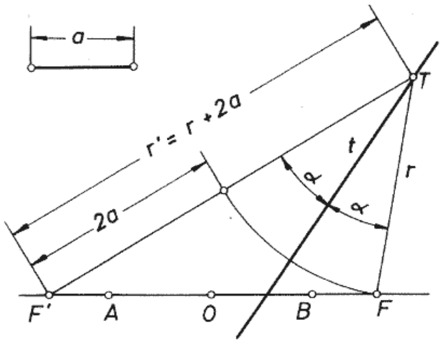


Fig. 14

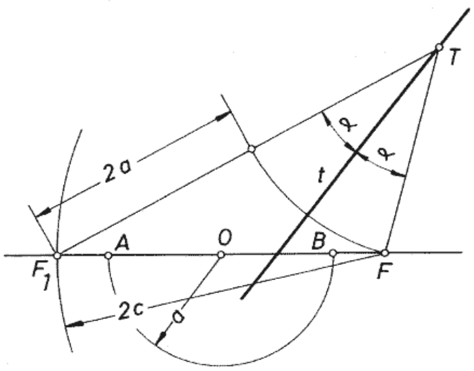


Fig. 15

15. Determinación de los elementos de una hipérbola conociendo un foco F, una tangente t con su punto de contacto T y la magnitud 2c. *(Fig. 15).*

Compárese este problema con el mismo estudiado en la elipse. En la figura, a partir de los datos, se resuelve con gran sencillez.

16. Determinación de los elementos de una hipérbola conociendo un foco F, una asíntota a y una tangente t. *(Fig. 16).*

Por el foco F se trazan ls rectas perpendiculares a la asíntota y a la tangente; los puntos N_1 y N_2 son de la circunferencia principal. La mediatriz de $\overline{N_1N_2}$ corta a la asíntota en O, centro de la curva, el cual, unido con F, nos da el eje mayor. Sobre la asíntota se toma $\overline{OM} = \overline{OF}$ y por M se traza la perpendicular al eje, obteniendo el vértice A. No se ha dibujado el simétrico de A respecto de O que sería el otro vértice.

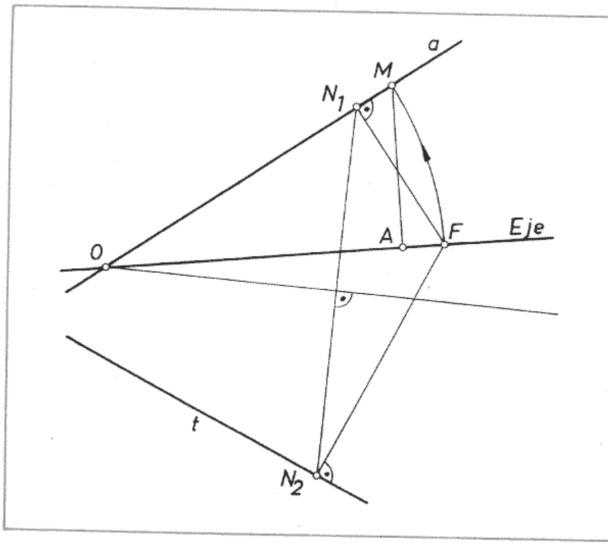


Fig. 16

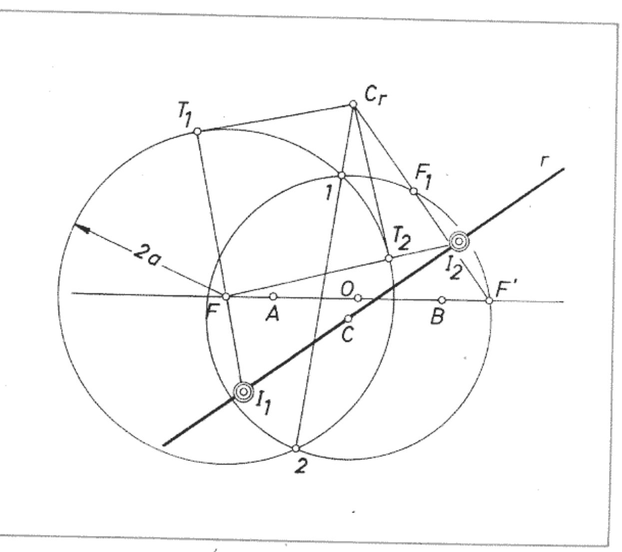


Fig. 17

17. Puntos de intersección de una recta con una hipérbola. *(Fig. 17).*

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos que son centros de circunferencias tangentes a una circunferencia focal y que pasan por el otro foco que no es centro de la focal. Es decir, los puntos de intersección de la recta r y de la hipérbola son los centros de las circunferencias tangentes a la focal de F y que pasan por los puntos F' y F_1, simétrico de F' respecto de la recta r. En la figura se resuelve este problema de tangencias ya estudiado.

18. Problema. *(Fig. 18).*

Una hipérbola está determinada por la distancia focal $2c = 50$ *mm.* y su eje real $2a = 35$ *mm.* Determinar los puntos de intersección con una recta que pasa por un foco y forma un ángulo de $22°30'$ con el eje real.

Solución: Como la recta pasa por un foco, el simétrico de él respecto de la recta es él mismo, reduciéndose el problema a buscar los puntos en la recta r que son centros de circunferencias tangentes a la focal de F', que pasan por F y son tangentes a la recta perpendicular a la dada por F. Este problema se resuelve en la figura como un problema de tangencias.

CURVAS CONICAS
ESTUDIO GRAFICO DE LA PARABOLA

1. Propiedades de la parábola. *(Fig. 1)*.

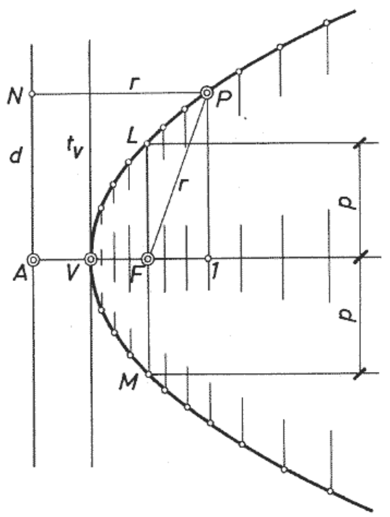


Fig. 1

La parábola es una curva plana, abierta y de una rama. Se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo *F*, llamado foco, y de una recta fija *d*, llamada directriz. Tiene un vértice *V* y un eje de simetría que pasa por *V* y por el foco y es perpendicular a la directriz. La tangente en el vértice a la curva es paralela a la directriz.

El vértice, como otro punto cualquiera, equidista de la directriz y del foco, es decir, $\overline{VA} = \overline{VF} = p/2$. Los radios vectores del punto *P* son $\overline{PN}$ y $\overline{PF}$.

Se llama parámetro $2p$ de la parábola, al igual que en la elipse y en la parábola, a la longitud de la cuerda que es perpendicular al eje en el foco.

La directriz *d* de la curva hace de circunferencia focal de la parábola, en este caso de radio infinito. Según esto, la directriz es el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco respecto de cada tangente.

La tangente en el vértice, que es una recta, hace de circunferencia principal y se define como en las curvas anteriores.

El foco equidista del punto de tangencia de una tangente y del punto donde ésta corta al eje de la curva.

2. Construcción de la parábola por puntos. *(Fig. 1)*.

Se conocen la directriz *d*, el eje y el foco. El vértice *V* es el punto medio del segmento $\overline{AF}$. Se traza por un punto *1* del eje, la perpendicular a éste y con centro en *F* y radio $\overline{A\text{-}1} = r$, se corta a dicha perpendicular, obteniendo el punto *P* y su simétrico, que son puntos de la curva; se tiene así $r = \overline{PF} = \overline{PN}$, según la definición de la curva; esta operación se repite para obtener nuevos puntos que se unen con plantilla de curvas.

Extraído de *"curso de dibujo geométrico y de croquización"*. F. J. Rodríguez de abajo –V. Álvarez Bengoa

3. Construcción de la parábola dados el eje, el vértice y un punto de la curva. *(Fig. 2).*

Se traza la tangente en el vértice, $\overline{VN}$, y la paralela $\overline{PN}$ al eje; se divide $\overline{PN}$ y $\overline{VN}$ en un número de partes iguales; el rayo $\overline{V\text{-}5}$ y la paralela por *5* al eje se cortan en el punto M de la curva; de la misma forma se han obtenido otros puntos de la curva.

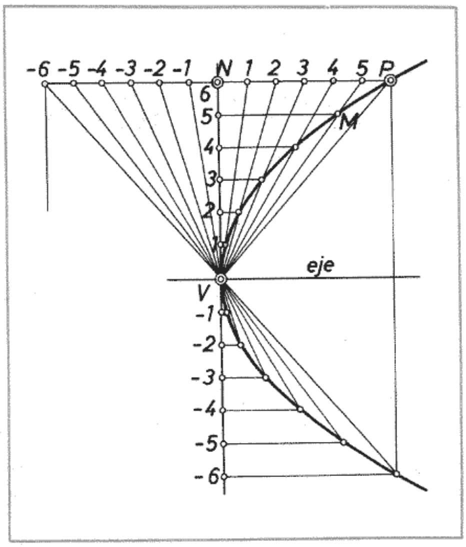


Fig. 2

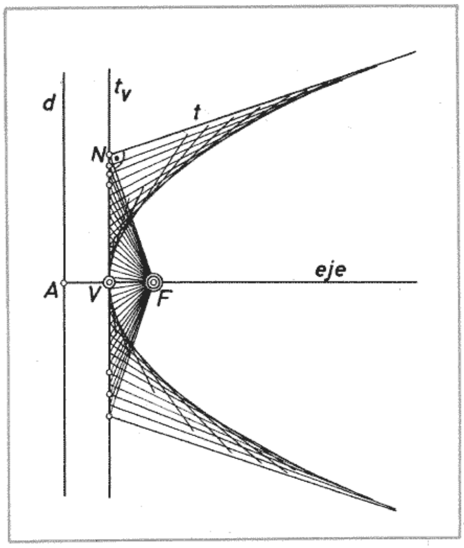


Fig. 3

4. Construcción de la parábola por envolventes. *(Fig. 3).*

Sabiendo que la tangente t_v en el vértice es la circunferencia principal de la curva, basta, como en la elipse, tomar puntos de ella, tal como el N, unirle con el foco F y por N trazar la perpendicular a $\overline{FN}$; esta recta t es tangente a la curva. Repitiendo esta operación se obtienen rectas tangentes que envuelven a la curva y que a la vez la van construyendo.

5. Trazado de la tangente y de la normal en un punto M de la parábola. *(Fig. 4).*

La tangente t en un punto M de la parábola es la bisectriz de los radios vectores $\overline{MN}$ y $\overline{MF}$; la normal n es perpendicular a la tangente.

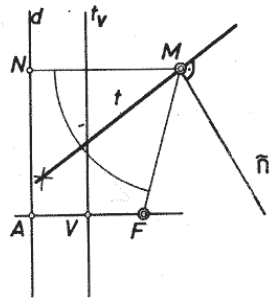


Fig. 4

6. Tangentes a la parábola desde un punto exterior. *(Fig. 5).*

Sea el punto P; se traza la circunferencia de radio $\overline{PF}$ y centro en P, la cual corta a la directriz, que en la parábola hace de circunferencia focal de radio infinito, en los puntos *1* y *2*. Las mediatrices de los segmentos $\overline{1\text{-}F}$ y $\overline{2\text{-}F}$ son las tangentes t_1 y t_2. Los puntos de tangencia T_1 y T_2 se obtienen trazando por *1* y *2* los radios vectores que son paralelos al eje. Las tangentes halladas cortan a la tangente en el vértice t_v en los puntos *3* y *4* que son los pies de las perpendiculares trazadas por el foco de las tangentes.

7. Tangente a la parábola paralela a una dirección dada. *(Fig. 6).*

La tangente ha de ser paralela a la dirección *D*; por el foco se traza la perpendicular a *D*, la cual corta en *M* a la directriz *d* y en *I* a la tangente en el vértice t_V. La tangente pasa por el punto *I* y su punto de tangencia es *T*, en la paralela por *M* al eje de la curva.

Obsérvese que la perpendicular por *F* a la dirección *D* es una circunferencia de radio infinito, precisamente la circunferencia de radio $\overline{PF}$ de la *figura 5*, pero que en este caso el punto *P* es impropio.

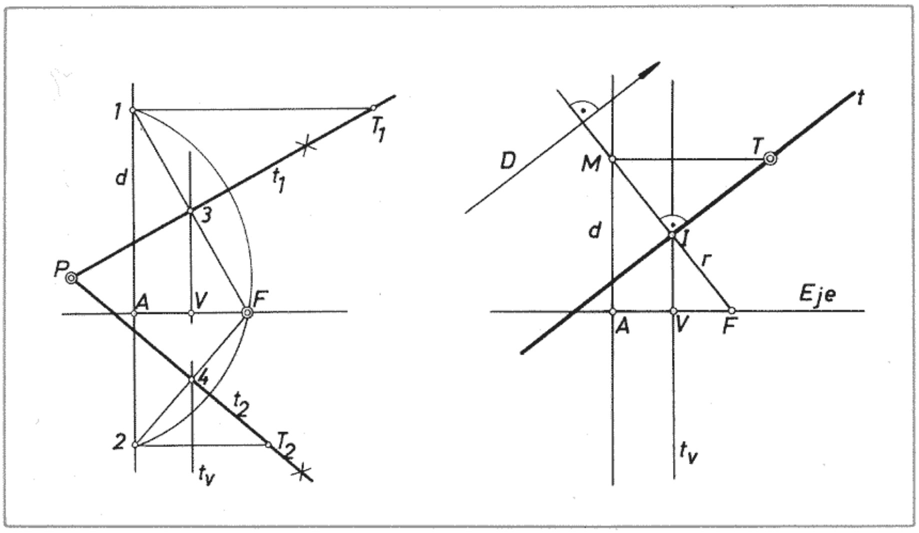


Fig. 5 *Fig. 6*

8. Determinación de los elementos de una parábola, conociendo la directriz d y dos puntos A y B de la curva. *(Fig. 7).*

Por *A* y *B* se trazan las perpendiculares a la directriz *d* y con los arcos de radios $\overline{AA_1}$ y $\overline{BB_1}$ se determina el foco *F* en su punto de intersección. La perpendicular por *F* a *d* es el eje, quedando tambiém definido el vértice *V*.

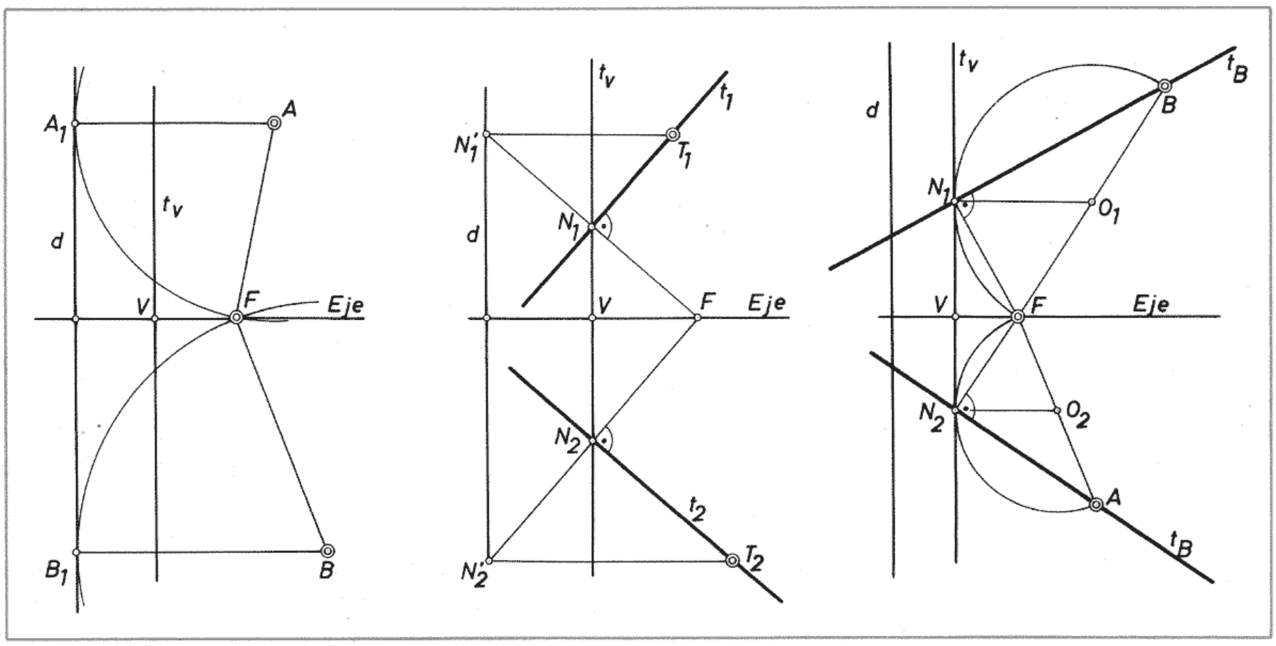


Fig. 7 *Fig. 8* *Fig. 9*

9. Determinación de los elementos de una parábola conociendo el foco y dos tangentes. *(Fig. 8)*.

Se hallan los puntos simétricos del foco F respecto a las tangentes t_1 y t_2, puntos N'_1 y N'_2, que son de la directriz; la tangente en el vértice t_v pasa por los puntos N_1 y N_2, pies de las perpendiculares trazadas por el foco a las tangentes.

10. Construcción de la parábola conociendo el foco F y dos puntos A y B de la curva. *(Fig. 9)*.

Se necesita buscar dos puntos N_1 y N_2 desde los cuales se vean los segmentos $\overline{FB}$ y $\overline{FA}$ bajo un ángulo recto. Estos puntos son los de contacto de la tangente común trazada a las dos semicircunferencias de diámetros $\overline{FB}$ y $\overline{FA}$. La recta N_1N_2 es la tangente en el vértice t_v. Las rectas BN_1 y AN_2 son las tangentes a la curva en B y A. El eje pasa por F y es perpendicular a t_v.

11. Construcción de la parábola conociendo la directriz d y dos tangentes t_1 y t_2. *(Fig. 10)*.

Las tangentes t_1 y t_2 cortan a la directriz en los puntos N y M; con vértices en estos puntos se construyen ángulos iguales al α y al β; el punto de intersección de los lados de estos ángulos es el foco F; la perpendicular FS a d es el eje y el vértice V es el punto medio de $\overline{FS}$. Esta construcción se funda en que si unimos F con N_1 y M_1, puntos pies de las perpendiculares trazadas por el foco a las tangentes, los triángulos MFB y NFA son isósceles.

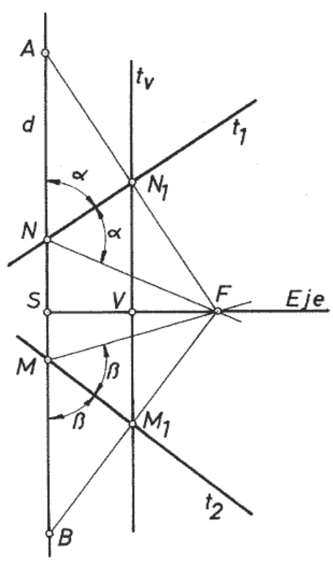


Fig. 10

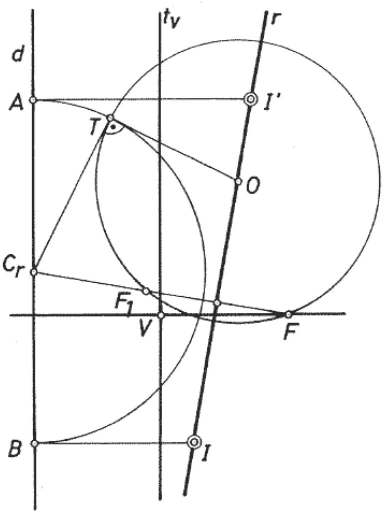


Fig. 11

12. Puntos de intersección de una recta con una parábola. *(Fig. 11)*.

El procedimiento es el mismo que para las otras cónicas ya estudiadas. Con centro en un punto O de la recta r, se traza la circunferencia que pase por F y que pasará también por el simétrico F_1 de F respecto a r; desde el punto C_r, centro radical, se traza la tangente $\overline{C_r\text{-}T}$ y este segmento se lleva sobre la directriz, obteniendo los puntos A y B; las paralelas al eje por A y B dan los puntos de intersección I e I' de la recta r con la parábola.

Extraído de *"curso de dibujo geométrico y de croquización"*. F. J. Rodríguez de abajo –V. Álvarez Bengoa